数理解析研究所講究録
398巻 1980年 89-97

Ⅲ型エルゴード変換の正規化群と、エルゴード的流れの中心化群

九大 教養　浜地敏弘

Ⅲ型の ergodic automorphism T に対して、ある automorphisms の ergodic flow $(F_t)_{t\in\mathbb{R}}$ (associated flow) が定まり [6] [10]、T の弱同値類と $(F_t)_{t\in\mathbb{R}}$ の同型類とが 1対1, onto, に対応する [10] ことが知られている。ところで $(F_t)_{t\in\mathbb{R}}$ の同型不変な諸性質がどのように T に反映しているだろうか。

(1) $(F_t)_{t\in\mathbb{R}}$ の point spectrum $Sp(F_t)$ と、T の T-set, $\mathrm{T}(T)$, は一致する [6]。

(2) もし $(F_t)_{t\in\mathbb{R}}$ が finite measure preserving ならば T の flip $\sigma : \Omega\times\Omega \ni (\omega, \omega') \longrightarrow (\omega', \omega)$ は直積変換群 $\{T^n : n\in\mathbb{Z}\}\times\{T^n : n\in\mathbb{Z}\}$ の full group の closure に属する [8]。 adding machine automorphism の flip は full group の closure に属するが、ある σ-finite measure preserving flow $(F_t)_{t\in\mathbb{R}}$ で、それを associated flow にもつ T の flip が full group の closure に属さない、従がって T が

adding machine automorphism でない例が知られている (Connes-Woods [3])。

(3) $(F_t)_{t\in\mathbb{R}}$ を finite measure preserving flow で, constant ceiling function と base automorphism U で作られた Ambrose flow とする。 Tを, $(F_t)_{t\in\mathbb{R}}$ を associated flow にもつ III型の ergodic automorphism とする。 この時 T が adding machine automorphism であることと, Uが次の条件をみたすことが同値になる: μ を U-不変確率測度とする。 $\forall\varepsilon>0$ と, μ に関して絶対連続な勝手なn個の確率測度 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ に対し, ある確率測度 $\nu \ll\mu$ が存在し,

$$\mu_j \overset{\varepsilon}{\in} co(\nu(T^i) : i\in\mathbb{Z})$$

をみたす。ここで右辺は $\nu(T^i), i\in\mathbb{Z}$, の convex hull, ε-近似は norm 位相による (Connes [4])

(4) (3)の前半の仮定の下で, もし U が正のエントロピーを持てば, Tは adding machine automorphism でない (Connes-Woods [5])。 (2)よりこの時の flip は full group の closure に属する。

ざっと以上のことが分かっている。 さてこの報告では, $(F_t)_{t\in\mathbb{R}}$ の中心化群を見ることで T の諸性質をとらえ, そして種々のエルゴード変換の中心化群を調べる。 証明は,

[8] と、近く出る論文 [9] に譲る。

(I) 正規化群 $\mathcal{N}[T]$ と、中心化群 $C((F_t)_{t\in\mathbb{R}})$。

$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の automorphisms の全体に弱位相：
$T_\alpha \longrightarrow T$ iff $\forall f \in L^1(P)$ に対し $f(T_\alpha^{-1}\omega)\frac{dPT_\alpha^{-1}}{dP}(\omega) \longrightarrow f(T^{-1}\omega)\frac{dPT^{-1}}{dP}(\omega)$ (L^1-norm),
を入れると、それは complete separable metrizable group になる。ergodic automorphism T に対し、$\{T^n R\omega ; n\in\mathbb{Z}\} = \{RT^n\omega ; n\in\mathbb{Z}\}$ a.e. ω. をみたす automorphisms R の全体を T の normalizer group と呼び $\mathcal{N}[T]$ で表わす。特にその部分群で $R\omega \in \{T^n\omega ; n\in\mathbb{Z}\}$ a.e. ω. をみたす R の全体を full group と呼び $[T]$ で表わす。$\mathcal{N}[T]$ の中に次の位相を導入する： $R_\alpha \longrightarrow R$ in $\mathcal{N}[T]$ iff (i) $R_\alpha \longrightarrow R$ (弱収束) (ii) $\forall g \in [T]$ に対し、$P(\omega : R_\alpha g R_\alpha^{-1}\omega \neq R g R^{-1}\omega) \longrightarrow 0$。
$\mathcal{N}[T]$ は、この位相の下で complete separable metrizable group になる。

automorphisms の ergodic flow $(F_t)_{t\in\mathbb{R}}$ に対して、$RF_t = F_tR$, $\forall t\in\mathbb{R}$, をみたす automorphisms の全体を centralizer $C((F_t)_{t\in\mathbb{R}})$ という。これは弱位相の下で、complete separable metrizable groups になる。

もし ergodic automorphism T が II_1 型ならば $\mathcal{N}[T]=[T]$,

T が II_∞ 型ならば $\mathcal{N}[T]/[T]$ は $\mathbb{R}$ と位相同型になる [7]。

所で Connes-Takesaki [2] は M が III 型 hyperfinite factor ならば, $(F_x)_{x\in\mathbb{R}}$ をその flow of weights とすると, $\mathrm{Aut}(M)$ から $c((F_x)_{x\in\mathbb{R}})$ への continuous into homomorphism (fundamental homomorphism) が存在し, その kernel は $\overline{\mathrm{Int}(M)}$ に含まれることを示した。Connes は [1] で, その kernel が実は $\overline{\mathrm{Int}(M)}$ に一致することを主張した。実は次の定理が示すように fundamental homomorphism は onto である。

<u>定理 1.</u> T を III 型の ergodic automorphism とし, $(F_x)_{x\in\mathbb{R}}$ をその associated flow とする。この時, 位相群 $\mathcal{N}[T]/[T]$ と $c((F_x)_{x\in\mathbb{R}})$ とは位相同型である。

(II) 中心化群 $c((F_x)_{x\in\mathbb{R}})$ がコンパクト群になることの特長づけ。

ergodic finite measure preserving flow $(F_x)_{x\in\mathbb{R}}$ が pure point spectrum を持つというのは, $(F_x)_{x\in\mathbb{R}}$ の固有関数族が存在し, L^2-空間の完備直交基底になることである。

<u>定理 2</u> $(F_x)_{x\in\mathbb{R}}$ を automorphisms の ergodic flow とする。この時, 中心化群 $c((F_x)_{x\in\mathbb{R}})$ が compact group になる為の必十条件は, $(F_x)_{x\in\mathbb{R}}$ が finite measure preserving

で pure point spectrum をもつことである。この時 $C((F_t)_{t\in\mathbb{R}})$ は $(F_t)_{t\in\mathbb{R}}$ の点スペクトル $Sp((F_t))$ の character group と同型であり、自動的に可換群となる。

系　T を III 型 ergodic automorphism とする。$N[T]/[T]$ が compact group になる為の必十条件は、その associated flow $(F_t)_{t\in\mathbb{R}}$ が finite measure preserving で、pure point spectrum をもつことである。この時、$N[T]/[T]$ は T-set, $T(T)$, の character group と同型になる。特に、$N[T]/[T]$ が1次元トーラスと同型になることと、T がある III_λ 型 $(0<\lambda<1)$ であることが同値になる。

(III) 中心化群 $C(F)$.

(III-1) Bernoulli-shift の中心化群について.

ergodic automorphism F の中心化群を考える。$C(F)$ の各元 U に対して、F の点スペクトル集合 $Sp(F)$ の character group の元 χ_U が定まり、

$$f_r(Ux) = \langle \chi_U, r\rangle f_r(x) \qquad r\in Sp(F)$$

をみたす。ここで $f_r(x)$ は F の固有値 r に対する固有関数である。

もし $U\in C(F)$ が ergodic ならば map $\chi_U : Sp(F)\ni r \longrightarrow \langle\chi_U, r\rangle \in Sp(U)$ は $Sp(F)$ と $Sp(U)$ の同形対応を

与える。従って、もし F が measure preserving で weak mixing ならば F と可換な ergodic automorphism は weak mixing になる。

F が measure preserving で、weak mixing の時、つまり $F\times F$ が ergodic の時、$C(F\times F)$ は非可換群である。というのは flip $(x, y)\to(y, x)$ と、$(x, y)\to(Fx, y)$ は共に $C(F\times F)$ の元だが、両者は可換でない。Bernoulli shift はある $F\times F$ と同型だから、その中心化群は非可換になる。

$$\{F^n ; n\in\mathbb{Z}\}\subset\overline{\{F^n ; n\in\mathbb{Z}\}}\subset CC(F)\subset C(F)$$

が成り立つ。ここで $C(F)$ は $C(F)$ の中心化群。もし F が strong mixing な finite measure preserving automorphism ならば $\{F^n ; n\in\mathbb{Z}\}$ は closed である。

Bernoulli shift F の中心化群 $C(F)$ について、その他知られていることを挙げると、

- $CC(F)=\{F^n ; n\in\mathbb{Z}\}$ (Rudolph [12])
- F はある Bernoulli flow $(F_t)_{t\in\mathbb{R}}$、$F_1=F$、に埋めこめるので $C(F)$ はすべての Bernoulli を含む。
- あるエントロピー零の weak mixing automorphism が $C(F)$ に含まれる (Rudolph [12])。
- ある weak mixing automorphism は $C(F)$ に含まれな

い（Ornstein [11]）

(III-2) adding machine automorphism の中心化群

$(r_n)_{n\geq 1}$ を 2 以上の整数列，X を $\{0, 1, \cdots, r_n-1\}$ $n\geq 1$ の無限直積空間とする。X はその元 $(x_n)_{n\geq 1}$ と $(y_n)_{n\geq 1}$ の和を右へ繰り上がりをもつ座標毎のたし算で与えることにより compact abelian group になる。μ_n を $\{0, 1, \cdots, r_n-1\}$ の probability measure（但し $\mu_n(i)>0$）とし，μ を無限直積測度 $\prod_{n=1}^{\infty}\mu_n$ とする。条件 $\sum_{n=1}^{\infty} 1-\mu_n(r_n-1)=\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} 1-\mu_n(0)=\infty$ の下で X の rotation T;

$$T(x_n)_{n\geq 1} = (x_n)_{n\geq 1} + (1, 0, 0, \cdots)$$

は ergodic automorphism になる。この T を adding machine automorphism という。

<u>命題</u>　T を上記 adding machine automorphism とする。$C(T)$ は群 X の部分群と代数的に同型になる。

<u>定理 3</u>　$\mu=\prod_{n=1}^{\infty}\mu_n$ を $X=\prod_{n=1}^{\infty}\{0, 1\}$ 上の無限直積測度で $\mu_n(0)=p$ $0<p<1$, $\mu_n(1)=1-p$ とする。T を adding machine automorphism とする。$C(T)$ は，もし $p\neq\frac{1}{2}$ ならば $\mathbb{Z}$ と同型になり，もし $p=\frac{1}{2}$ ならば X と同型になる。

ergodic automorphism F で $C(F)$ が $\mathbb{Z}$ と同型になる他の例は Ornstein [11] にある。

adding machine automorphism と base automorphism にし constant ceiling function の Ambrose flow と associated flow にもつIII型 ergodic automorphism はある adding machine automorphism である [7]. これと定理 1. 3 より

<u>系</u> III型の adding machine automorphism T で、$\mathcal{N}[T]/[T]$ が $\mathbb{R}$ と同型になる例がある。

<u>注</u> III型 adding machine automorphism T で、$\mathcal{N}[T]/[T]$ が非可換群になる例が分かっていない。これについては、初めに述べた (3) の条件の下では $C((F_t)_{t\in\mathbb{R}})$ は可換になるだろうと予想されている。

文献

1. A. Connes ; On the classification of von Neumann algebras and their automorphisms, Symposia Mathematica 20 (1975), 435–478

2. A. Connes and M. Takesaki ; The flow of weights of factors of type III, Tohoku Math. J. 29 (1977), 473–575.

3. A. Connes and J. Woods ; A construction of approximately finite dimensional non-ITPFI factors, Canad. Math. Bull. 23 (1980), 227–229.

4. A. Connes : 未発表.

5. A. Connes and J. Woods : 未発表.

6. T. Hamachi, Y. Oka and M. Osikawa : Flows associated with ergodic non-singular transformation groups, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 11 (1975), 31-50.

7. T. Hamachi and M. Osikawa ; Ergodic groups of automorphisms and Krieger's theorems (preprint).

8. T. Hamachi and M. Osikawa : Fundamental homomorphism of normalizer group of ergodic transformations, Lecture notes in Math. Springer Verlag, 729 (1978), 43-57.

9. T. Hamachi ; The normalizer group of an ergodic automorphism of type III and the commutant of an ergodic flow. (To appear)

10. W. Krieger ; On ergodic flows and isomorphism of factors, Math. Ann. 223 (1976), 19-70.

11 D. Ornstein ; On the root problem in ergodic theory, Proc. of Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Berkeley and Los Angeles. (University of California Press) 2 (1972), 347-356

12. D. Rudolph ; The second centralizer of a Bernoulli shift is just its powers, Israel J. Math. 29 (1978), 167-178